Études en mathématiques fondamentales

Julien Hauseux

Parcours académique

Lycée
- Seconde (Sept. 2003 – Sept. 2004)
- Première S (Sept. 2004 – Sept. 2005)
- Terminale S (Sept. 2005 – Sept. 2006)

Classe prépa
- MPSI (Sept. 2006 – Sept. 2007)
- MP (Sept. 2007 – Sept. 2008)

École d'ingénieur
- 1ère Année (Sept. 2008 – Sept. 2009)
- 2ème Année (Sept. 2009 – Sept. 2010)

Intérêt général pour les sciences (biologie, physique, mathématiques etc.)

Envie de continuer mes études en mathématiques et en physique. Décision d'aller en prépa.

Redécouverte des mathématiques (formalisme, nouveaux domaines...) Développement de mon goût pour les mathématiques

Envie de faire de la recherche en mathématiques (sans connaître précisément ce que c'est)

Petite pause militaire

Année pluridisciplinaire (maths, physique, info, chimie, mécanique...)

(Polytechnique)
- 3ème Année (Sept. 2010 – Sept. 2011)
- 4ème Année (Sept. 2011 – Sept. 2012)

Université Paris-Sud
- Thèse de doctorat (Sept. 2012 – Sept. 2015)

Projet : enseignant-chercheur

Approfondissement en mathématiques Stage de recherche (découverte 3 mois)

M2 « Mathématiques fondamentales » à Jussieu Mémoire de M2 avec mon futur directeur de thèse

Début du travail de recherche et découverte de l'enseignement (à l'IUT de Sceaux)

Les + et les - dans le travail de recherche

Les +

— C'est une activité passionnante
— Grande liberté dans son travail (organisation, orientation dans ses recherches etc.)
— Possibilité de voyager pour se rendre à des conférences ou des rencontres en Europe ou dans le monde

Les -

— Le travail de recherche est parfois solitaire
— La recherche peut être difficile : on est souvent face à des problèmes très compliqués et il ne faut pas se décourager

Sujet de recherche

Les nombres p-adiques
Ici p est un nombre premier (ex : $p = 7$). On peut écrire tous les entiers naturels en base p (au lieu de 10). Par exemple :

$$2292 = \mathbf{6} \cdot 7^3 + \mathbf{4} \cdot 7^2 + \mathbf{5} \cdot 7^1 + \mathbf{3} \cdot 7^0 = 6453 \text{ en base } 7.$$

Au lieu de considérer les nombres avec une infinité de chiffres après la virgule en base 10, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (comme $\pi = 3,14159\ldots$), on considère des nombres qui peuvent s'écrire avec une infinité de chiffres *avant* la virgule en base p, par exemple $\overline{\ldots 666}$, $\overline{\ldots 121212}$, $\overline{\ldots 251413}$ en base 7. Ces nombres sont appelés les nombres p-adiques. On peut les additionner (ou les multiplier) en utilisant les mêmes règles de calculs (avec des retenues) : en base 7, on a $5 + 4 = \overline{12}$ car $5 + 4 = 9 = 7 + 2$; on a $\overline{25} + \overline{34} = \overline{62}$ car $5 + 4$ donne 2 et une retenue, puis $2 + 3 = 5$ donc 6 avec la retenue etc. Autre exemple avec une infinité de chiffres cette fois (mais sans retenue) :

$$\overline{\ldots 121212} + \overline{\ldots 333} = \overline{\ldots 454545}.$$

Plus étonnant : dans certains cas la retenue peut être reportée de chiffre en chiffre vers la gauche et « disparaître » : par exemple, on a $\overline{\ldots 666} + 1 = 0$, donc $\overline{\ldots 666} = -1$.

Les espaces p-adiques
Les nombres réels permettent de faire de la géométrie : $\mathbb{R}$ est la droite, $\mathbb{R}^2$ le plan, $\mathbb{R}^3$ l'espace etc. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par l'ensemble des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et étudier les espaces $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}_p^2$, $\mathbb{Q}_p^3$ etc. La « géométrie » de ces espaces est très étrange. On a par exemple les propriétés suivantes dans ces espaces :
— tous les triangles sont isocèles ;
— tout point d'une boule (c'est-à-dire une sphère pleine) est au centre ;
— deux boules sont soit disjointes, soit contenues l'une dans l'autre.

Groupes et représentations
Un groupe est un ensemble d'objets que l'on peut « multiplier », c'est-à-dire que si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, on peut écrire XY et on obtient ainsi un troisième élément. On demande qu'il existe un élément neutre noté E tel que $XE = EX = E$, et que tout élément X admette un inverse noté X^{-1} tel que $XX^{-1} = X^{-1}X = E$. Par exemple, l'ensemble des nombres réels non nuls $\mathbb{R}^\times$ est un groupe pour la multiplication (l'élément neutre est 1). De même avec l'ensemble des nombres p-adiques non nuls $\mathbb{Q}_p^\times$.

Les exemples précédents sont construits à partir de la multiplication de nombres. Dans ce cas, l'opération est « commutative », c'est-à-dire que $XY = YX$. Cependant, tous les groupes ne sont pas constitués de nombres et en général l'opération n'est pas commutative : on peut avoir $XY \neq YX$ (par exemple, l'ensemble des similitudes du plan est un groupe non commutatif pour la composition, notée $\circ$, dont l'élément neutre est l'identité).

Les groupes sont des objets qui apparaissent partout en mathématiques. Certains d'entre eux sont extrêmement intéressants, mais aussi extrêmement compliqués et font l'objet de recherches très actives. Une façon de les étudier consiste à comprendre leurs *représentations*, qui permettent de comprendre une « image » d'un groupe.

Parmi tous ces groupes, certains sont aussi des espaces « géométriques » (par exemple, on peut voir $\mathbb{R}^\times$ comme un groupe pour la multiplication et comme la réunion de deux demi-droites). De même il existe des groupes p-adiques, c'est-à-dire qui sont à la fois des groupes et des espaces p-adiques (par exemple $\mathbb{Q}_p^\times$).