La suite de Fibonacci

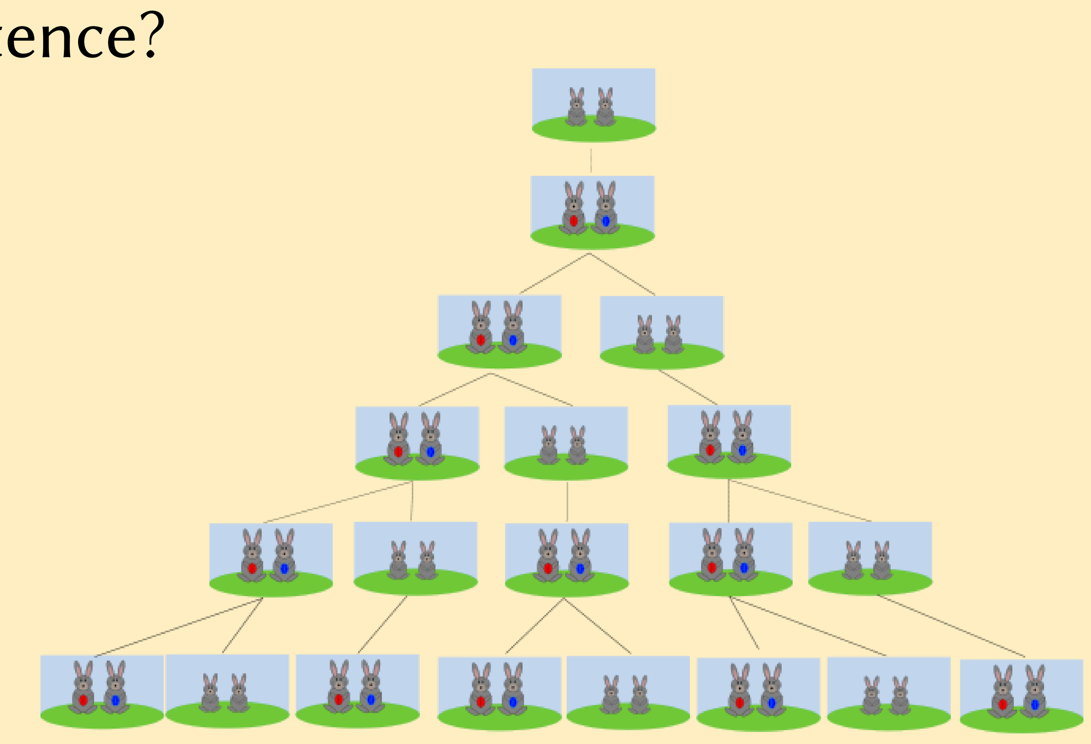
Vie et oeuvre de Fibonacci

De son vrai nom Leonard de Pise (Leonardo Bigollo), Fibonacci naît en 1170 à Pise. Il est initié au calcul indo-arabe en Algérie, vers 1192. Il retourne vers 1200 à Pise où il travaille pour améliorer ses connaissances pendant 25 ans. Peu d'ouvrages de Fibonacci ont survécu car il a vécu avant l'imprimerie. Son plus important est le Liber Abacci (1202). *Il y introduit la numérotation indo-arabe* et sa célèbre suite. En 1225, il publie le Liber Quadratorum où il présente ses recherches en arithmétique, notamment des triplets pythagoriciens et la notion de congruence. Il est probablement mort vers 1245 à Pise.

Le problème des lapins

Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de chaque mois si

I. on commence avec un couple de bébé lapins,
II. chaque couple produit chaque mois un nouveau couple,
III. les couples deviennent productifs au second mois de son existence?



La réponse est donné par la *suite de Fibonacci*

1 1 2 3 5 8 13 21 $\cdots$

Propriétés de la suite de Fibonacci

- **Définition par récurrence** Si l'on appelle f_n le n-ième terme de la suite de Fibonacci alors sa définition par récurrence est donnée par

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ pour } n \geq 1$$

- **Limite des rapports** La limite des quotients des termes de la suite de Fibonacci est

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034.$$

Ce nombre est connu comme le *nombre d'or*.

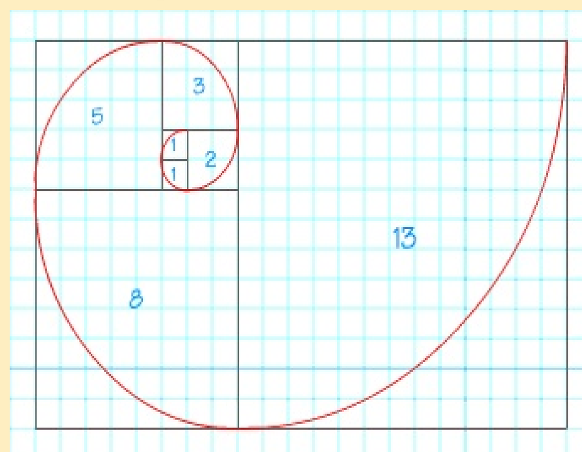
- **Coprimalité** Deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux, c'est à dire

$$\text{pgcd}(f_n, f_{n+1}) = 1$$

pour tout entier naturel n.

Fibonacci et la nature

- **Des pétales** Des fleurs ont des nombres de pétales qui correspondent aux nombres de Fibonacci. On trouve des fleurs qui ont 3 pétales (lys), d'autres 5 (bouton d'Or), 8, 13 et même 21, 34, 55 ou 89 pétales (marguerites).
- **La spirale de Fibonacci** A partir d'un carré de côté 1, on construit un nouveau carré qui s'appuie sur le précédent. Puis on répète la construction, chaque nouveau carré appuie son côté sur les carrés déjà construits. Dans chaque carré, on trace un quart de cercle comme dans la figure. La courbe obtenue s'appelle la spirale de Fibonacci.



Ce type de spirale est présent dans des différents objets de la nature: coquilles de mollusques, galaxies, etc.

Le nombre d'or

Le nombre d'or, noté souvent Φ, est le seul nombre positif vérifiant

$$x^2 = x + 1.$$

On peut l'exprimer aussi comme une fraction continue infinie

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}.$$

- **Utilisation en architecture** A partir de ce nombre a été construit le Parthénon. En effet, le rapport entre la largeur d'une façade et sa hauteur est le nombre d'or. Ce rapport est connu comme la *divine proportion*.

On en trouve aussi cette proportion dans la pyramide de Kheops, le temple de Salomon, et la plupart des églises romanes.

- **Utilisation en peinture** La divine proportion est omniprésent dans la peinture. Elle apporte un aspect esthétique à une ouvre d'art, cela explique sa présence (même involontaire) dans de nombreuses oeuvres d'art. Des centaines d'artistes l'ont employée, parmi lesquels: Leonard de Vinci, Botticelli, Géricault.

Jesua Epequin Chavez
jesua.chavez@imj-prg.fr
Institut de Mathématiques de Jussieu