Points et nombres constructibles

Macarena Peche Irissarry
Institut de mathématiques de Jussieu, UPMC, Paris

Qu'est-ce qu'un nombre constructible?

▶ **IDÉE**

Les nombres constructibles sont ceux qui correspondent à la longueur d'un segment que l'on peut construire à la règle (non graduée) et au compas, à partir d'un segment de longueur 1.

▶ **FORMALISME**

Soit E un ensemble de points du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

- Un point est **constructible en une étape** à partir de E s'il est dans l'intersection de deux objets parmi :
  - l'ensemble des droites qui passent par deux points de E
  - l'ensemble de cercles centrés en un point de E qui passent par un autre point de E

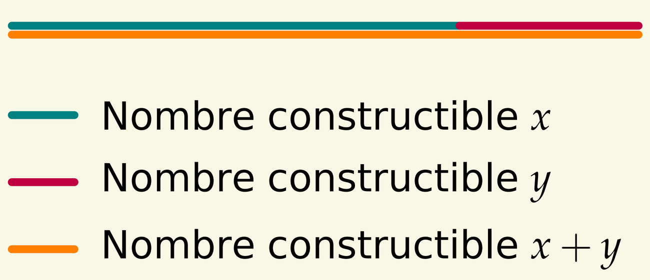
  On denote $C_1(E)$ l'ensemble de points constructibles en une étape à partir de E.
- L'ensemble de points **constructibles en n étapes** à partir de E est défini par $C_n(E) = C_1(C_{n-1}(E))$.
- L'ensemble des **points contructibles** à partir de E est donc

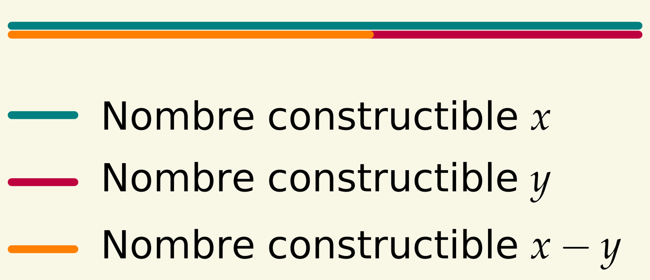
$$C(E) = \cup_{n=1}^{\infty} C_n(E)$$

- Un nombre réel est un **nombre constructible** s'il est l'abcisse d'un point constructible à partir de $\{(0,0),(1,0)\}$.

Opérations sur les nombres constructibles

▶ Addition et soustraction :

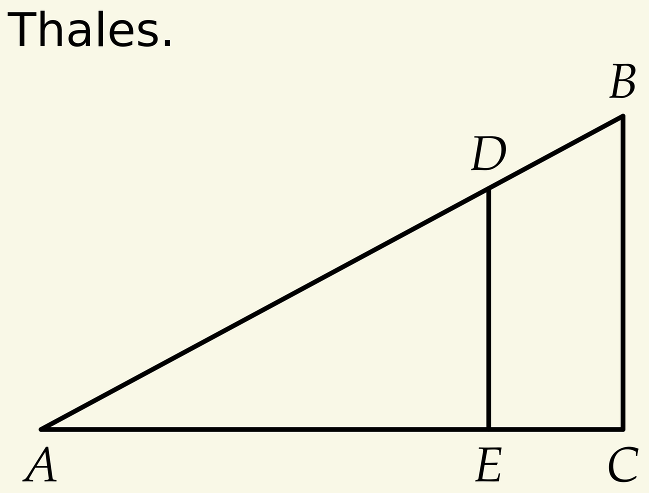




Ces opérations nous disent que tous les entiers positifs sont constructibles (et tout les entiers relatifs si on admet des longueurs négatives).

▶ Multiplication et division :

La multiplication et la division sont possibles grâce au théorème de Thales.



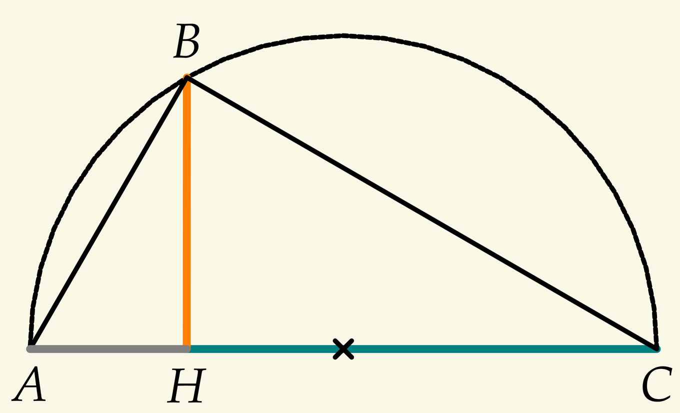
Théorème de Thales Soit un triangle ABC, et deux points D et E de sorte que les droites (DE) et (BC) sont parallèles (comme indiqué sur l'illustration). Alors on a:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

En utilisant ces proportions, on peut construire la multiplication et division de deux entiers non nuls comme suit :

On peut faire la multiplication pour tout x et y entiers positifs et la division pour tout x et $y \neq 0$. Cela nous dit que tous les nombres rationnels positifs sont constructibles (et aussi les rationnels négatifs si on admet des longueurs négatives).

▶ Racine carrée



Nombre constructible x
Nombre constructible $\sqrt{x}$
Nombre constructible 1

puisque l'on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AH^2 + BH^2 + HC^2 + BH^2$$

qui nous donne

$$BH^2 = AC - 1 = AH$$

En 1837, d'après les travaux de Gauss, Pierre-Laurent Wantzel montre que ce sont toutes les opérations que l'on peut faire avec les nombres constructibles (on l'énonce son théorème de deux formes différentes) :

Théorème de Wantzel. L'ensemble des nombres constructibles (à la règle et au compas) est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Théorème de Wantzel (v2.0). Un nombre complexe est constructible si et seulement s'il appartient à une tour d'extensions quadratiques.

Les trois grands problèmes de l'Antiquité

Dans la Grèce antique, trois problèmes étaient considérés comme très difficiles à résoudre :

▶ **Duplication du cube :** À l'aide d'une règle et d'un compas, peut-on construire un cube de volume double ?

▶ **Quadrature du cercle :** À l'aide d'une règle et d'un compas, peut-on construire un carré dont l'aire égale celle d'un disque ?

▶ **Trisection de l'angle :** À l'aide d'une règle et d'un compas, peut-on sectionner en trois parties égales n'importe quel angle ?

Il a fallu les outils de l'algèbre pour montrer que ces problèmes sont **irrésolubles**. En effet, ils sont équivalents dans le langage algébrique, à montrer que chaque nombre des trois ensembles suivants est constructible :

▶ **Duplication du cube :** $\{\sqrt[3]{x} \mid x$ est constructible$\}$

▶ **Quadrature du cercle :** $\{\sqrt{\pi}\}$

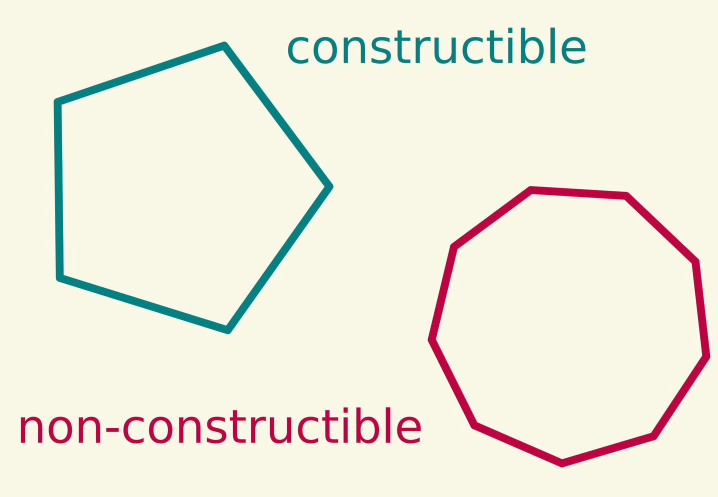
▶ **Trisection de l'angle :** $\{\cos(\frac{\arccos x}{3}) \mid x$ est constructible$\}$

La non-constructibilité des éléments du premier et dernier ensemble est une conséquence directe du théorème de **Wantzel**. La non-constructibilité de $\sqrt{\pi}$ est due au fait que π est un nombre *trascendent* (c'est-à-dire, il n'existe pas de polynôme à coefficients rationnels dont π est une racine). Ceci a été démontré par **Carl Louis Ferdinand von Lindemann** en 1882.

Un autre problème intéressant est la **construction des polygône réguliers de n côtés**. La solution a ce problème est, encore une fois, un résultat de Gauss et Wantzel.

Théorème de Gauss-Wantzel. Un polygone à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Un nombre premier de Fermat est un premier de la forme $p = 2^{2^k} + 1$ pour $k \geq 0$, par exemple : 3, 5, 17, 257 . . .



Origamis

On peut définir d'autres types de constructibilité, comme la constructibilité par pliage du papier, les **origamis**, définie en 1893 par T. Sundara Row et formalisée par les **axiomes de Huzita-Hatori**.

Cette construction ne nous permet pas de faire des racines carrées, mais on peut résoudre certains problèmes qui sont irrésolubles avec la constructibilité à la règle et au compas, comme la **trisection d'angles** et la **duplication du cube**.